TD 3 : Séries de fonctions

Exercice 1 :

On pose $u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx))$ **avec** $x \in \mathbb{R}^+$ **.**

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (un) sur $[0,+\infty[$

2) Étudier la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ **avec a > 0.**

3) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ **.**

Exercice 2 :

On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ **avec** $x \in \mathbb{R}$ **.**

Étudier la convergence uniforme de (f_n **) sur** $\mathbb{R}$ **.**

Exercice 3 : On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. **Etudier la convergence simple de cette série sur** $]0,+\infty[$
2. **Etudier la convergence uniforme de cette série sur** $]a,+\infty[$ **ou a>0.**

Exercice 4 : Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

1- **Montrer que la série de fonctions** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ **converge uniformément sur [-a, a] où a>0**

2- **Montrer que cette série est continue sur** $\mathbb{R}$.

3- **Montrer que la série de fonctions** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ **avec**

1- **Montrer que cette série converge pour tout** $x \in \mathbb{R}$.

2- **Montrer que** $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ **est une fonction continue.**

3- **Montrer que**

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$